

## APLICACION DEL METODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS A PROBLEMAS DE INTERPOLACION

JUAN CARDONA

y

AVELINO SAMARTIN

*Dpto. Análisis de las Estructuras*

*E.T.S. de Ingenieros de Caminos*

*Universidad de Santander, España*

### RESUMEN

Como es conocido, no siempre admite solución el problema de interpolación polinómica de Birkhoff. En este trabajo se presenta un método como alternativa a este tipo de problemas para la obtención de interpolantes con unas determinadas condiciones de continuidad y en el cual el criterio de aproximación es el de minimización de un cierto funcional real utilizando el método de los elementos finitos. Se describe el método empleado, así como diversos ejemplos 1-D y la extensión a problemas 2-D.

### SUMMARY

The existence of the solution for the problem of polynomial Birkhoff interpolation is not always guaranteed. In this paper an alternative method in order to find an interpolant polynomial is shown. In this procedure the minimization of a given functional is needed and therefore finite elements techniques are applied. Several numerical examples for 1-D and 2-D problems are shown and the results are commented.

### INTRODUCCION

Existen numerosos problemas en la Ciencia y en la Técnica que precisan para su resolución la utilización de procedimientos de interpolación. Se citan a continuación algunos ejemplos:

- a) La fabricación automatizada de objetos mecánicos crea la necesidad de algoritmos de definición de formas geométricas (carrocerías de un coche, etc.) en dos o tres dimensiones. En este sentido los algoritmos de interpolación de datos puntuales representan una herramienta poderosa, permitiendo pasar de un diseño definido por un conjunto de puntos y condiciones de tangencia a la materialización de la forma continua generada por estos datos discretos más unas consideraciones de estética y/o aerodinámicas.
- b) Conocidas las coordenadas  $(x,y)$  y la cota  $z$  de un conjunto de puntos obtenidos de un trabajo taquimétrico, se intenta obtener la superficie del terreno y las curvas de nivel representativas del mismo. Según el tipo de variación del terreno, se pueden suponer unos niveles de continuidad a la superficie interpolante.

Recibido: Septiembre 1985

- c) En el trazado de una vía de comunicación, puede ser interesante el diseño del eje, de forma que sea lo más suave posible (condición de comodidad y seguridad de la circulación) y satisfaga una serie de condiciones, como el paso por un conjunto de puntos especificados exactamente o dentro de un entorno de error.
- d) Definición de la geometría de estructuras conocidas las características óptimas en un conjunto discreto de secciones. Por ejemplo el conocimiento de la directriz de una serie de arcos horizontales de una presa bóveda y los valores de los espesores en algunas secciones de los mismos. La definición de la bóveda exige obtener una superficie suave, sin bruscos cambios de curvatura.

Se trata aquí el problema de interpolación y aproximación de funciones 1-D y 2-D con un determinado orden de continuidad  $C^K$  a partir de un conjunto de datos de Birkhoff sobre un conjunto  $\Omega$  y con la condición de minimización de un determinado funcional cuadrático.

Después de formular el problema en  $R^n$ , se hace una exposición del método empleado en  $R^1$  así como su aplicación a distintos ejemplos. La extensión a un mayor número de dimensiones sigue una pauta similar. En particular se ha aplicado al caso 2-D con la utilización de los hiperelementos  $C^K$  extraclase  $H^9$  como elementos finitos. Se obtienen las funciones de forma para un elemento de esta familia, y se indican las ventajas e inconvenientes de la utilización de éstos. Por último se analiza la potencia del método, en el sentido de comprobar la aproximación alcanzada en función de la relación número de datos y número de incógnitas consideradas.

### PLANTEAMIENTO GENERAL

Los ejemplos citados anteriormente pueden ser considerados como casos particulares del siguiente problema:

Sea  $\Omega$  un dominio acotado de  $R^N$ . El espacio  $W_2^m(\Omega)$  de las funciones  $u \in L_2(\Omega)$  cuyas derivadas generalizadas de orden  $\leq m$  son de  $L_2(\Omega)$ , con el producto escalar

$$(u, v)_{W_2^m(\Omega)} = \sum_{|i| \leq m} (D^i u, D^i v)_{L_2(\Omega)}$$

donde

$$D^i u = \frac{\partial^{|i|} u}{\partial_{x_1}^{i_1} \partial_{x_2}^{i_2} \cdots \partial_{x_N}^{i_N}}, \quad |i| = i_1 + i_2 + \cdots + i_N$$

constituye un espacio de Hilbert<sup>1, 2</sup>.

Dada la sucesión de formas lineales continuas sobre  $W_2^m(\Omega)$   $L_i$   $1 \leq i \leq n$ , y los datos  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n$  se trata de encontrar una función  $u \in W_2^m(\Omega)$  que satisfaga

$$L_i(u) = r_i \quad 1 \leq i \leq n$$

y además minimice el funcional real

$$Fu = \int_{\Omega} \sum_{|i| \leq m} a_i(x) (D^i u)^2 d\Omega \quad (1)$$

con  $a_i(x)$  funciones reales, medibles Lebesgue y acotadas  $a_0(x) > 0$ ,  $a_i(x) \geq 0$  y  $m > 0$  tal que la integral sea convergente (exista y sea finita).

En los apartados siguientes particularizamos para las situaciones 1-D ( $R^1$ ) y 2-D ( $R^2$ ) suponiendo que los datos  $r$  corresponden a valores de la función y de las derivadas en una sucesión no necesariamente correlativa ni completa en cada nodo de interpolación (datos de Birkhoff).

### APLICACION A PROBLEMAS 1-D

#### Enunciado

Dados los nodos de interpolación  $a \leq x_1 \leq \dots \leq x_{nn} \leq b$  y los números reales  $r_{ik}$   $1 \leq i \leq nn$ ,  $0 \leq k \leq k_i$  donde  $k_i$  indica el máximo orden de derivación en el nodo  $i$ . La determinación de una función  $u \in P_{n-1}[a, b]$  que interpole los datos.

$$u^k(x_i) = r_{ik} \quad (n \text{ ecuaciones}) \quad (2)$$

y cumple la condición

$$\int_a^b \left( \frac{d^n u}{dx^n} \right)^2 dx = 0 \quad (3)$$

constituye un problema típico de interpolación polinómica dentro del cual se pueden distinguir los siguientes casos:

- 1) Si sólo se da como dato el valor de la función en los nodos, es un problema de interpolación de Lagrange.
- 2) Si en cada nodo  $x_i$ , la sucesión  $0 \leq k \leq k_i$  no tiene salto, se trata de un problema de Hermite.
- 3) En el caso de un solo nodo  $x_i = x_1$  y la sucesión  $0 \leq k \leq k_1$  es ininterrumpida, estaremos en el problema de Taylor.

En general se tendrá un problema de interpolación de Birkhoff.

Como es conocido<sup>3</sup> existe solución única de (2) en los tres casos 1), 2), 3) y además hay métodos de construcción del polinomio interpolador. Mientras que en el caso general para la interpolación de Birkhoff no se puede asegurar lo mismo.<sup>4</sup>

Por otra parte, un serio inconveniente a la interpolación polinómica en un gran número de puntos se debe a que el error de interpolación puede aumentar con el grado del polinomio<sup>3, 5</sup>.

Una extensión de este problema corresponde a sustituir la condición (3) por la de que el siguiente funcional real sea mínimo.

$$Fu = \int_a^b \sum_{i=0}^m a_i(x) (u^{(i)})^2 dx = ((u, u)) \quad (4)$$

con  $a_i$  suficientemente uniformes y no negativos en  $[a, b]$ ,  $a_0(x) > 0$  y con  $m.t.q. |Fu| < \infty$ . Tanto la integral (3) como (4) tienen sentido en el espacio  $W_2^m[a, b]$  de las funciones  $u$  de clase  $C^{m-1}(a, b)$  t.q.  $u^{m-1}$  es absolutamente continua en  $[a, b]$  y  $u^m \in L_2[a, b]$ .

El problema entonces se puede plantear de la siguiente manera:

$$\min \{Fu, u \in U\}$$

$$U = \{u \in W_2^m[a, b], u^k(x_i) = r_{ik}\}$$

### Método de los elementos finitos

El método de los elementos finitos es una particularización del método de Ritz, y permite generar una solución aproximada

$$u_n(x) = \sum_{j=1}^n u_j \phi_j(x)$$

dentro de un determinado subespacio finito dimensional  $V_n \subset W_2^m[a, b]$  mediante una elección muy concreta de las funciones base  $\phi_j$ .

Tanto la matriz de rigidez (**K**) como el vector de cargas (**P**) del sistema de Ritz pueden obtenerse como la suma booleana de la contribución de cada elemento (formulación local).

En un elemento  $\Omega_e = [x_i, x_{i+1}]$  con  $NGLE$  grados de libertad se representa el vector de incógnitas ( $g.d.l.$  libres e impuestos) asociado a este elemento por

$$\underset{(NGLE \times 1)}{u^e} = (u_1^e, u_2^e)^t$$

con  $u_1^e$  y  $u_2^e$  los vectores de  $g.d.l.$  incógnitas asociados a los nudos 1 y 2 del elemento

$$u_1^e = (u_{i0}, u_{i1}, \text{---}, u_{iI_i})^t$$

$$u_2^e = (u_{(i+1)0}, u_{(i+1)1}, \dots, u_{(i+1)I_i+1})^t$$

y  $I_i + 1$  el número de  $g.d.l.$  asociados al nudo  $i$ .

El vector de funciones de forma

$$N^e = (N_1^e, N_2^e)$$

contiene las funciones de forma asociadas a los nudos 1 y 2 del elemento,

$$N_1^e = (N_{10}^e(x), N_{11}^e(x), \text{---}, N_{1I_i}^e(x))$$

$$N_2^e = (N_{20}^e(x), N_{21}^e(x), \text{---}, N_{2I_i+1}^e(x))$$

En el apéndice-A se indican las funciones de forma para distintos tipos de elementos.

La restricción de la solución aproximada  $u_n(x)$  al elemento  $\Omega_e$  es

$$u_n^e(x) = \underset{(1 \times NGLE)}{N^e(x)} \cdot \underset{(NGLE \times 1)}{u^e} \quad (5)$$

El funcional  $F$  (4), definido sobre el espacio lineal  $V_n \subset W_2^m [a, b]$  de dimensión  $n$  igual al número total de g.d.l., puede expresarse de la forma

$$Fu_n = \int_a^b (\mathbf{L}u_n)^t (D) (\mathbf{L}u_n) dx$$

$$\mathbf{L} = \left( 1, \frac{d}{dx}, \frac{d^2}{dx^2}, \dots, \frac{d^m}{dx^m} \right)^t$$

$$\begin{matrix} (D) \\ (m+1) \times (m+1) \end{matrix} = \begin{bmatrix} a_0 & & 0 \\ a_1 & & \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m \end{bmatrix}$$

desarrollando por elementos resulta:

$$Fu_n = \sum_{e=1}^{NE} \int_{\Omega_e} (\mathbf{L}u_n^e)^t (D) (\mathbf{L}u_n^e) dx = \sum_{e=1}^{NE} F^e u_n^e$$

con  $NE$  el número de elementos.

$$F^e u_n^e = \int_{\Omega_e} (\mathbf{L}u_n^e)^t (D) (\mathbf{L}u_n^e) dx \quad (6)$$

Así se ha reducido el problema a nivel de cada elemento  $\Omega_e$ .

Se sustituye (5) en (6) y desarrollando se obtiene:

$$F^e u_n^e = \mathbf{u}^{e^t} \cdot \mathbf{k}^e \cdot \mathbf{u}^e$$

donde la matriz de rigidez elemental, de dimensión  $NGLE \times NGLE$  es

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega_{e_1}} (\mathbf{L}\mathbf{N}^e(x))^t (D) (\mathbf{L}\mathbf{N}^e(x)) dx$$

En la práctica los cálculos se efectúan en coordenadas baricéntricas

$$x = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \xi + \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$$

$$dx = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} d\xi = \frac{l^e}{2} d\xi$$

$$\mathbf{L} = \left( 1, \frac{2}{l^e} \frac{d}{d\xi}, \dots, \left( \frac{2}{l^e} \right)^m \frac{d^m}{d\xi^m} \right)^t$$

los coeficientes  $a_i(\xi)$  se obtienen por interpolación lineal entre los valores definidos como datos de entrada en los extremos de los elementos  $a_k(x_i)$

$$a_j(\xi) = \frac{1}{2} \{ a_k(x_{i+1}) (\xi + 1) + a_k(x_i) (1 - \xi) \}$$

quedando

$$K^e = \int_{-1}^1 (L N^e(\xi))^t (D) (L N^e(\xi)) \frac{l^e}{2} d\xi$$

El siguiente paso es el ensamblaje en la matriz de rigidez global. Se amplían las matrices con ceros hasta llegar a la dimensión  $n$   $\begin{smallmatrix} K^e \\ n \times n \end{smallmatrix}$ ,  $\begin{smallmatrix} U^e \\ n \times n \end{smallmatrix}$ , con lo cual se tiene

$$FU = \sum_{e=1}^{NE} U^{et} K^e U^e = U^t \left( \sum_{e=1}^{NE} K^e \right) U = U^t \cdot K \cdot U$$

ahora  $U$  es el vector de incógnitas global, que puede ponerse

$$U = (U_l, U_i)^t$$

y la matriz de rigidez global,

$$K_{n \times n} = \begin{bmatrix} K_{ll} & K_{li} \\ K_{il} & K_{ii} \end{bmatrix}$$

donde los subíndices  $l, i$  varían, respectivamente, entre los g.d.l. libres e impuestos.

El funcional  $F$  depende sólo de los g.d.l. libres

$$FU_l = (U_l^t, U_i^t) \begin{bmatrix} K_{ll} & K_{li} \\ K_{il} & K_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_l \\ U_i \end{bmatrix}$$

desarrollando

$$FU_l = U_l^t \cdot K_{ll} \cdot U_l + 2 U_l^t \cdot K_{li} \cdot U_i + U_i^t \cdot K_{ii} \cdot U_i \quad (7)$$

aplicando la condición necesaria de mínimo

$$0 = \frac{\partial F}{\partial U_l^t} = 2 K_{ll} U_l + 2 K_{li} U_i$$

$$K_{ll} U_l = -K_{li} U_i \quad (8)$$

De las propiedades de la forma  $((.,.))$  (4) se deduce que la matriz de rigidez  $K_{ll}$  es simétrica, definida positiva e invertible; por tanto el sistema (8) es únicamente resoluble para cada  $n > 0$ ; así como, la convergencia de la sucesión de Ritz  $u_n(x)$  a la solución exacta  $u(x)$  <sup>(1, 2, 6, 7)</sup>.

Una vez calculado  $U_l$  mediante la expresión:

$$U_l = K_{ll}^{-1} (-K_{li} \cdot U_i)$$

se obtiene la solución aproximada al sustituir en (5).

El valor mínimo del funcional puede calcularse si se sustituye (8) en (7), es decir:

$$F_{\min} \equiv F U_l = U_l^t K_{li} U_i + U_i^t K_{ii} U_i \quad (9)$$

Este método permite generar interpolantes  $u_n(x)$  de clase  $C^\infty$  en el dominio de cada elemento, pero con un orden de continuidad en los nodos  $C^K$  ( $K = \min l_i$ ) determinado por el tipo de elemento utilizado.

Se puede reducir el orden de continuidad  $K$  en un nudo si se disminuye el número de g.d.l. asociados a ese nudo. Sin embargo, es posible, sin necesidad de modificar las funciones de forma, variar el orden de continuidad y el crecimiento del interpolante en un punto  $x_i$  al asociar dos nudos a la misma posición  $x_i$ ; con lo cual independizamos los g.d.l. correspondientes e imponiendo además las condiciones requeridas.

Este hecho se puede aprovechar para aproximar funciones con discontinuidades puntuales. Un caso típico corresponde a las soluciones fundamentales de problemas con valores de contorno (funciones de Green) que presentan discontinuidades de este tipo<sup>10</sup>.

Como aplicación numérica, se presentan a continuación los siguientes ejemplos:

### Ejemplos de aplicación 1

Obtención de la función  $u(x)$  sobre el intervalo  $[-1, 1]$  que satisface los datos,

$$\begin{aligned} u(-1) &= 1 \\ u'(0) &= u'_0 \quad (\text{dato}) \\ u(1) &= 1 \end{aligned} \quad (10)$$

y minimiza los siguientes funcionales,

$$Fu = \int_{-1}^1 (a_0 u^2 + a_1 u'^2 + a_2 u''^2) dx$$

Se ha utilizado una malla formada por dos elementos de igual longitud con distintos g.d.l. asociados a cada nudo (figura 1).

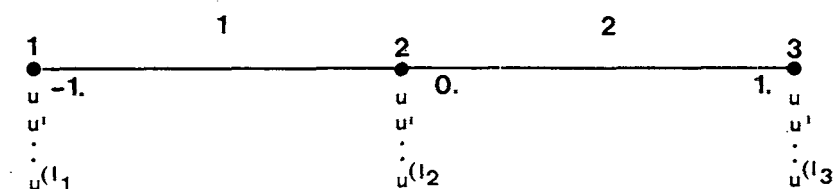


Figura 1.— Malla (Ejemplo de aplicación -1).

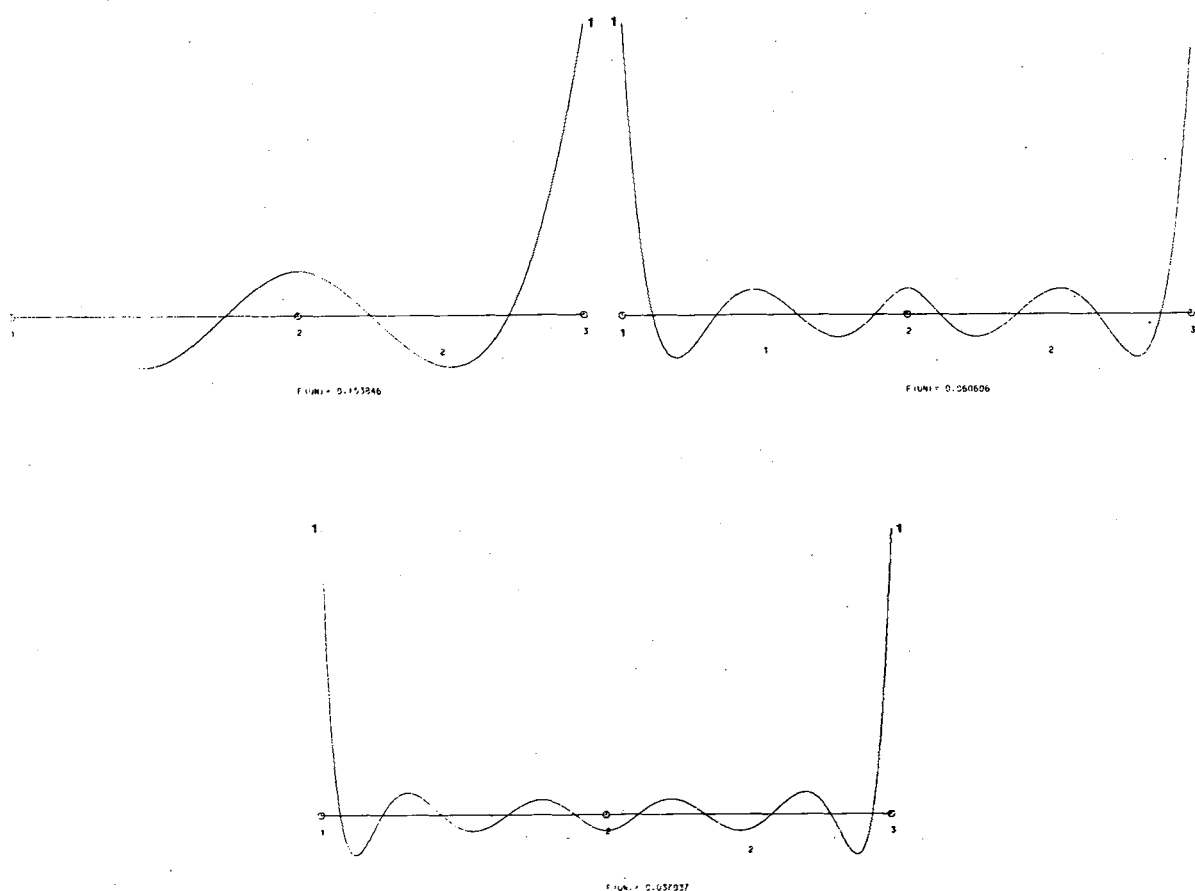
En general este problema de interpolación de Birkhoff (10) no admite solución por polinomios  $P \in P_2 [-1, 1]$  de grado  $\leq 2$ . basta observar que el determinante del sistema,

$$\begin{aligned} p(-1) &= 1 \\ p'(0) &= u'_0 \\ p(1) &= 1 \end{aligned}$$

es igual a cero.

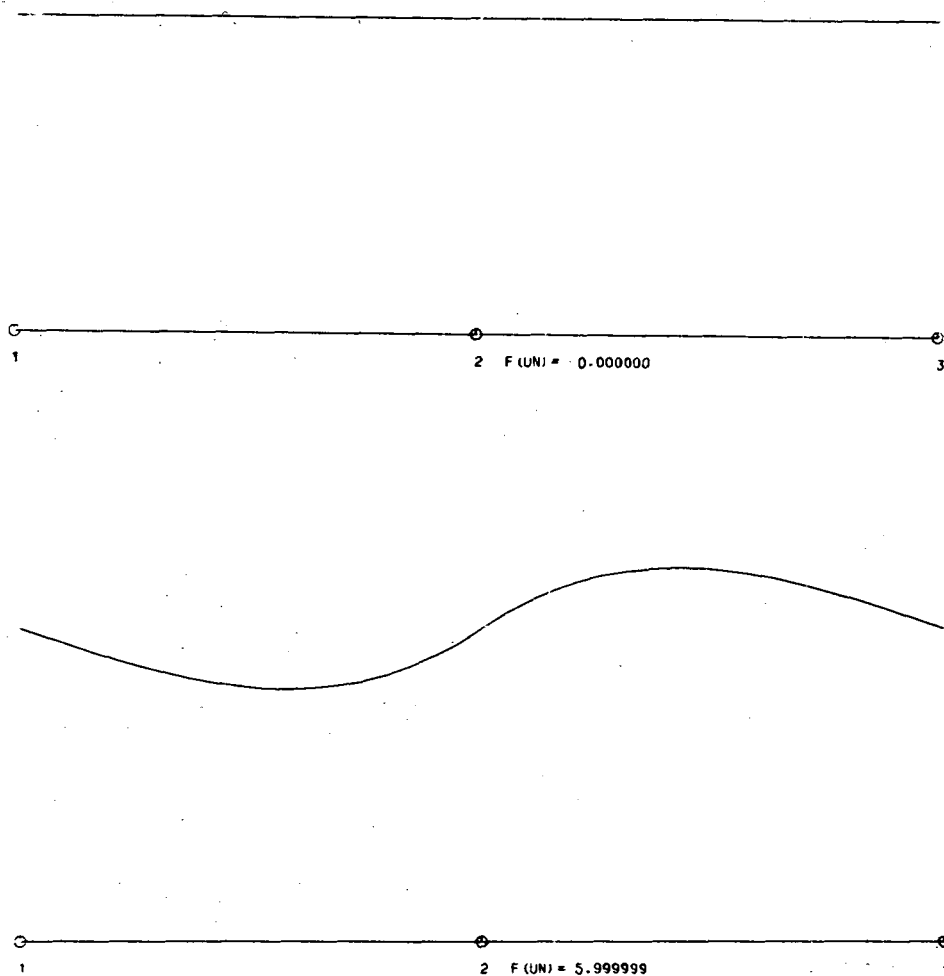
Con la condición de suavidad introducida en la minimización de  $F$  se aporta una solución a este problema.

En la Tabla 1 se indica la solución obtenida a partir de la ecuación de Euler de  $F$  con las condiciones dadas en el dominio de cada elemento (solución exacta). Esta se puede comparar con la solución numérica (solución aproximada) empleando distintos tipos de elementos según se indica en las Tablas 2-5 y Figuras 2-4.



Figuras 2-a, 2-b, 2-c.— Solución aproximada con elementos  $C^1$ ,  $C^2$ ,  $C^3$ , respectivamente para el funcional  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = a_2 = 0$  y los datos  $u(-1) = u(1) = 1$ ,  $u'_0 = 0$  (Tabla 2).





Figuras 3-a, 3-b.— Solución aproximada con elementos  $C^1$   $a_0 = a_2 = 0, a_1 = 1$ . a)  $u'_0 = 0$ ; b)  $u'_0 = 1$  (Tabla 3).

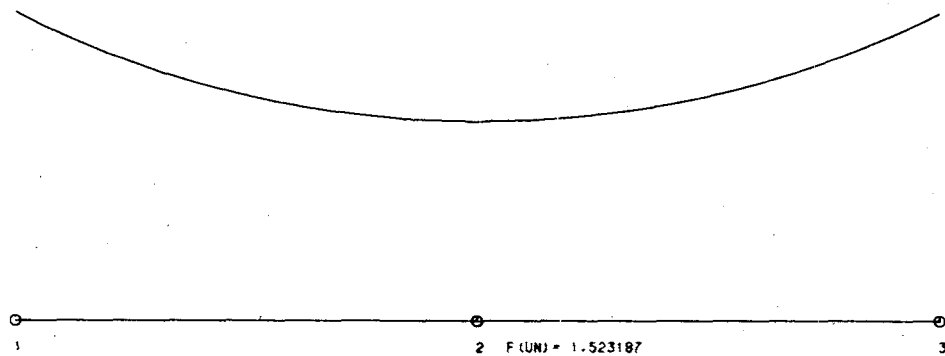


Figura 4.— Solución aproximada con elementos  $C^2$ . Funcional  $a_0 = a_1 = 1, a_2 = 0$ ;  $u_0 = 0$  (Tabla 5).

FUNCIONAL $a_0 \ a_1 \ a_2$	SOLUCION ECUACION EULER $u(x)$	$Fu$
1 0 0	$0 \in L_2[-1, 1]$	0
0 1 0	$1 \text{ en } [-1, 1]$	0
0 0 1	$\frac{u'_0}{2}x^3 + \frac{3}{2}u'_0x^2 + u'_0x + 1 \text{ en } [-1, 0]$ $\frac{u'_0}{2}x^3 - \frac{3}{2}u'_0x^2 + u'_0x + 1 \text{ en } [0, 1]$	$6u'_0{}^2$
1 1 0	$\frac{1}{(e^{-1}+e)}(e^x + e^{-x}) \text{ en } [-1, 1]$	$2 \frac{e - e^{-1}}{e + e^{-1}} = 1.52319$

Tabla 1.— Solución analítica

MALLA		RESULTADOS					
NUDOS $x_i$	DATOS $r_{ij}$	GDL/NUDO $l_i+1$	$u(x_i)$	$u'(x_i)$	$u''(x_i)$	$u'''(x_i)$	$Fu$
-1.0	$u(x_1) = 1.$	2	1.00000	-6.00000			0.15385
0.0	$u'(x_2) = 0.$	2	0.15385	0.00000			
1.0	$u(x_3) = 1.$	2	1.00000	6.00000			
-1.0		3	1.00000	$-1.6000 \cdot 10^1$	$1.5564 \cdot 10^2$		0.06061
0.0		3	0.09090	0.00000	$-2.5455 \cdot 10^1$		
1.0		3	1.00000	$1.6000 \cdot 10^1$	$1.5564 \cdot 10^2$		
-1.0		4	1.00000	$-2.6500 \cdot 10^1$	$4.4472 \cdot 10^2$	$-5.1200 \cdot 10^3$	0.03704
0.0		4	$-5.5556 \cdot 10^{-2}$	0.00000	$1.1667 \cdot 10^1$		
1.0		4	1.00000	$2.6500 \cdot 10^1$	$4.4472 \cdot 10^2$		
-1.0	$u(x_1) = 1.$	2	1.00000	-5.25000			0.16218
0.0	$u'(x_2) = 1.$	2	0.15385	1.00000			
1.0	$u(x_3) = 1.$	2	1.00000	6.75000			
-1.0		3	1.00000	$-1.7714 \cdot 10^1$	$1.8402 \cdot 10^2$		0.07028
0.0		3	0.09091	1.00000	$-2.5455 \cdot 10^1$		
1.0		3	1.00000	$1.4286 \cdot 10^1$	$1.2726 \cdot 10^2$		
-1.0		4	1.00000	$-2.7881 \cdot 10^1$	$4.9344 \cdot 10^2$	$-6.0007 \cdot 10^3$	0.03863
0.0		4	$-5.5556 \cdot 10^{-2}$	1.00000	$1.1667 \cdot 10^1$	$-3.1800 \cdot 10^2$	
1.0		4	1.00000	$2.5119 \cdot 10^1$	$3.9601 \cdot 10^2$	$4.2393 \cdot 10^3$	

Tabla 2.— Solución aproximada correspondiente al funcional  $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$ , utilizando dos elementos de clases  $C^1, C^2, C^3$ , sucesivamente; y para los casos  $u'_0 = 0$  y  $u'_0 = 1$ .

MALLA			RESULTADOS				
NUDOS $x_i$	DATOS $r_{ij}$	GDL/NUDO $l_i+1$	$u(x_i)$	$u'(x_i)$	$u''(x_i)$	$u'''(x_i)$	Fu
-1.0	$u(x_1) = 1.$	2	1.00000	0.00000			0.00000
0.0	$u'(x_2) = 0.$	2	1.00000	0.00000			
1.0	$u(x_3) = 1.$	2	1.00000	0.00000			
-1.0	$u(x_1) = 1.$	2	1.00000	$2.5000 \cdot 10^{-1}$			$2.5000 \cdot 10^{-1}$
0.0	$u'(x_2) = 1.$	2	1.00000	1.00000			
1.0	$u(x_3) = 1.$	2	1.00000	$2.5000 \cdot 10^{-1}$			

 Tabla 3.— Solución aproximada con elementos  $C^1$ ; funcional  $a_0 = a_2 = 0, a_1 = 1$ .

MALLA			RESULTADOS				
NUDOS $x_i$	DATOS $r_{ij}$	GDL/NUDO $l_i+1$	$u(x_i)$	$u'(x_i)$	$u''(x_i)$	$u'''(x_i)$	Fu
-1.0	$u(x_1) = 1.$	2	1.00000	0.00000			0.00000
0.0	$u'(x_2) = 0.$	2	1.00000	0.00000			
1.0	$u(x_3) = 1.$	2	1.00000	0.00000			
-1.0	$u(x_1) = 1.$	2	1.00000	$-5.0000 \cdot 10^{-1}$			6.00000
0.0	$u'(x_2) = 1.$	2	1.00000	1.00000			
1.0	$u(x_3) = 1.$	2	1.00000	$-5.0000 \cdot 10^{-1}$			

 Tabla 4.— Solución aproximada con elementos  $C^1$ , funcional  $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1$ .

MALLA			RESULTADOS				
NUDOS $x_i$	DATOS $r_{ij}$	GDL/NUDO $l_i+1$	$u(x_i)$	$u'(x_i)$	$u''(x_i)$	$u'''(x_i)$	Fu
-1.0	$u(x_1)=1.$	1	1.00000				1.52381
0.0	$u'(x_2)=0.$	2	0.64286	0.00000			
1.0	$u(x_3)=1.$	1	1.00000				
-1.0		2	1.00000	-0.75312			1.52321
0.0		2	0.64873	0.00000			
1.0		2	1.00000	0.75312			
-1.0		3	1.00000	-0.76156	0.99913		1.52319
0.0		3	0.64806	0.00000	0.64763		
1.0		3	1.00000	0.76156	0.99913		
-1.0		4	1.00000	-0.76159	1.00000	-0.76148	1.52319
0.0		4	0.64805	0.00000	0.64805	0.00000	
1.0		4	1.00000	0.76159	1.00000	0.76148	

 Tabla 5.— Solución aproximada correspondiente al funcional  $a_0 = a_1 = 1, a_2 = 0$  con elementos de distinto orden y  $u'_0 = 0$ .

Se observa la convergencia a la solución exacta al incrementar el orden de los elementos para los casos  $a_0 = 1, a_1 = a_2 = 0$  y  $a_0 = a_1 = 1, a_2 = 0$  (Tablas 2 y 5).

Para  $a_0 = a_2 = 0, a_1 = 1$  sólo admite solución clásica con  $u'_0 = 0$ , sin embargo, se da una solución aproximada para los casos  $u'_0 \neq 0$  (Tabla 3).

Finalmente, en el caso  $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 1$  se observa el acuerdo entre las dos soluciones si se utilizan elementos de orden 3 (polinomios de tercer grado), no así para otros órdenes.

## Ejemplos de aplicación 2

Conocidos una serie de datos, obtenidos de una función  $f(x)$  en  $[0, \pi]$  correspondientes a valores de la función y derivadas de orden  $\leq 2$  (datos de Birkhoff) en distintos puntos de intervalo, se trata de determinar la función  $u(x)$  que los satisfase y minimiza los siguientes funcionales,

$$Fu = \int_0^\pi (a_0 u^2 + a_1 u'^2 + a_2 u''^2 + a_3 u'''^2) dx$$

Dentro de los diversos casos analizados, se presentan los resultados correspondientes a dos funcionales distintos para diferentes distribuciones de los datos (Tabla 6).

La malla está formada por 41 nodos igualmente espaciados ( $x_{i+1} = x_i + \pi/40$ ) y elementos  $C^2$  (figura 5).

Los datos han sido obtenidos de la función  $f(x) = \sin x$ . Los casos 4, 5, y 6 corresponden a datos aleatorios, mientras que en los tres primeros se ha optado por una distribución más regular como se puede ver en el Apéndice B.

FUNCIONAL $a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3$	CASO	RENDIMIENTO NUMERO DATOS/NUMERO GDL (%)	SOLUCION APROXIMADA $Fu_n$	SOLUCION EXACTA	
				$Ff$	$f(x)$
1 1 1 0	1	14.63	4.71138	4.71239	$\sin x$
	2	20.33	4.71219		
	3	36.59	4.71238 (Fig.5)		
	4	14.63	4.71017		
	5	20.33	4.70998		
	6	36.59	4.71234		
0 0 1 0	1	14.63	1.57068	1.57089	$\sin x$
	2	20.33	1.57077		
	3	36.59	1.57079		
	4	14.63	1.57055		
	5	20.33	1.57029		
	6	36.59	1.57079		

Tabla 6.— Resultados correspondientes a la aproximación a  $f(x)$  con diferentes distribuciones de datos (Ejemplo de aplicación 2).

En este ejemplo se observa el incremento de la calidad de la aproximación con el número de datos. Así, con un rendimiento del 36.59% se obtiene una exactitud hasta la cuarta cifra decimal.

En cuanto a los diferentes tipos de mallas utilizados, se encuentra un aumento en la exactitud del método al incrementar el número de valores impuestos correspondientes a derivadas de bajo orden, en particular la función.

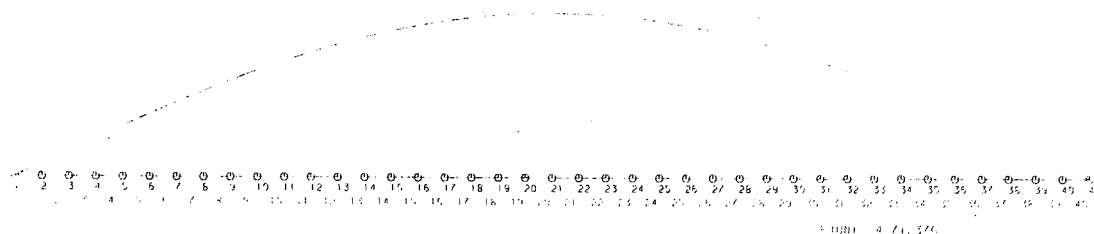


Figura 5.— Función aproximada de  $f(x) = \sin x$  en  $[0, \pi]$ , con el funcional  $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_3 = 0$  y elementos  $C^2$  (Tabla 6).

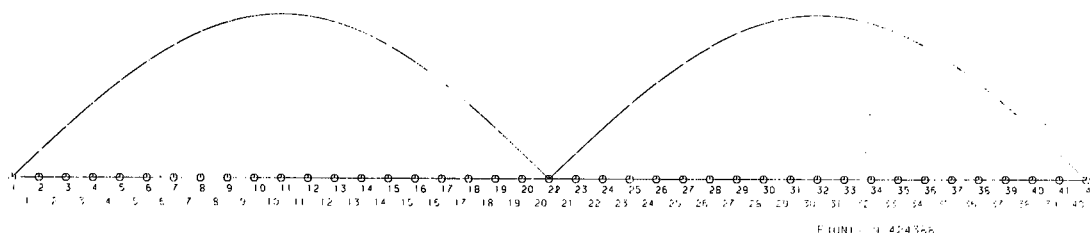


Figura 6.— Función aproximada de  $f(x) = |\sin x|$  en  $[0, 2\pi]$ . Funcional  $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ ,  $a_3 = 0$ . Elementos  $C^2$ .

A continuación se ha estudiado el efecto de una discontinuidad de salto en la derivada primera. La función a interpolar es ahora  $f(x) = |\sin x|$  en  $[0, 2\pi]$ , con el funcional a minimizar

$$Fu = \int_0^{2\pi} a_0 u^2 + a_1 u'^2 + a_2 u''^2 dx$$

La malla utilizada consta de 42 nudos, y elementos  $C^2$  (fig. 6). Los g.d.l. asociados a los nudos 21 y 22 se han independizado al imponer  $x_{21} \neq x_{22}$ . Existe sin embargo la posibilidad de hacer coincidir alguno de estos g.d.l., obteniéndose así los siguientes casos de análisis:

CASO	CONDICIONES EN LA DISCONTINUIDAD					
	$u(x_{21})$	$u(x_{22})$	$u'(x_{21})$	$u'(x_{22})$	$u''(x_{21})$	$u''(x_{22})$
1	impuestos (dato)		independientes		iguales	
2	iguales		independientes		independientes	
3	independientes		independientes		iguales	

En la Tabla 7 se indican los resultados obtenidos con distintas distribuciones de datos (Apéndice C), comparándose el valor del mínimo del funcional con el valor exacto.

FUNCIONAL $a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3$	MALLA	CASO	NUM.DATOS NUM.G.D.L.	VALOR DE FU		
				APROXIMADO	EXACTO	
1 1 1 0	1	1	36.51	9.42439	9.42478	Fig. 6
		2	34.92	9.39950		
		3	34.92	9.39950		
	2	1	36.51	9.42141		
		2	34.92	9.39123		
		3	34.92	9.39035		

Tabla 7.— Resultados correspondientes a la función aproximada de  $f(x) = |\sin x|$ .  
Los datos de la malla 2 están distribuidos en forma aleatoria.

Conclusiones similares al ejemplo anterior se aplican aquí. Por otra parte, con el mismo número de datos se obtienen mejores resultados al imponer el valor de la función en el nudo que presenta discontinuidad.

## EXTENSION A PROBLEMAS 2-D

El procedimiento descrito para la situación monodimensional puede extenderse a un mayor número de dimensiones.

Básicamente el método sigue los mismos pasos que en la situación 1-D por lo que no se expone en detalle. Sin embargo, se ha empleado una metodología mas directa desde el punto de vista numérico.

### Enunciado

Dado el conjunto de puntos del plano  $p_i$   $1 \leq i \leq N$  y los números reales  $\eta_{-k,k}^i$  se trata de encontrar una función  $u$  dentro del espacio de funciones admisibles  $W_2^m(\Omega)$  que satisfaga

$$\frac{\partial_u^l(p_i)}{\partial x^{l-k} \partial y^k} = r_{l-k, k}^i \quad 0 \leq l \leq k_i \quad 0 \leq k \leq l \quad (\text{sucesión interrumpida, datos de Brikhoff})$$

con  $k_i$  el máximo orden de derivación asociado al punto  $p_i$ ; y minimice el funcional

$$Fu = \int_{\Omega} \left\{ a_{00} u^2 + a_{10} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + a_{01} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ \left. + a_{11} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 + \dots + a_{0m} \left( \frac{\partial^m u}{\partial y^m} \right)^2 \right\} d\Omega$$

Existen configuraciones concretas de  $n$  puntos de  $R^2$  y espacios finito-dimensionales de polinomios de manera que el correspondiente problema de interpolación de Lagrange o Hermite tiene solución única<sup>3, 8</sup>

Se sabe también que como cuando se interpola en el caso 1-D en el intervalo  $[a, b]$  al añadir nuevos nudos, más que aumentar el grado del polinomio interpolador, conviene subdividirlo en elementos. Aquí análogamente a la hora de interpolar en una región 2-D conviene subdividirla.

### Método de los elementos finitos

El método sigue una pauta similar a la descrita en la situación 1-D:

Se divide el dominio  $\Omega$  en  $NE$  elementos triangulares y  $NN$  nudos de forma que los puntos  $p_i$  coincidan con algunos de éstos. Nos situamos así en el dominio-discretizado  $\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{NE} \Omega_e$ .

Dentro de la malla, los nudos pueden ser de tres tipos:

- vértices
- puntos medios de los lados
- centro de gravedad.

A cada uno se le asigna un determinado número de g.d.l. según el tipo de elemento utilizado.

Si  $n$  es el número total de g.d.l. de la malla; se trata de obtener una solución aproximada en el subespacio  $n$ -dimensional  $V_n \subset W_2^m(\Omega)$  generado por las funciones base  $\phi_i$ . Estas se obtienen a partir de las funciones de forma definidas a nivel de cada elemento.

La solución aproximada se escribe entonces:

$$u_n(x, y) = \sum_{i=1}^n u^i \cdot \phi_i(x, y) = \frac{\phi}{1 \times n} \cdot \frac{U}{n \times 1}$$

sustituyendo en la expresión del funcional,

$$Fu_n = \int_{\Omega_h} (\mathbf{L} u_n)^t (D) (\mathbf{L} u_n) d\Omega$$

con

$$\mathbf{L} = \left( 1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \dots, \frac{\partial^m}{\partial y^m} \right)^t$$

y la matriz de coeficientes

$$(D) = \begin{bmatrix} a_{00} & & & \\ & a_{10} & & \\ & & a_{01} & \\ & & & 0 \\ & 0 & & & a_{0m} \end{bmatrix}$$

La restricción de  $u_n$  al elemento  $\Omega_e$  es

$$u_n^e = \frac{\mathbf{N}^e}{1 \times \text{NGLE}} \frac{\mathbf{u}^e}{\text{NGLE} \times 1}$$

$$\mathbf{N}^e = (N_1^e, \dots, N_{\text{NGLE}}^e)$$

siendo  $N_i^e(x, y)$  la función de forma  $i$ -ésima de  $\Omega_e$

$$F^e u_n^e = \int_{\Omega_e} (\mathbf{L} \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e)^t (D) (\mathbf{L} \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e) d\Omega_e = \mathbf{u}^{e^t} \mathbf{k}^e \mathbf{u}^e$$

la matriz de rigidez elemental, se escribe

$$k_{ij}^e = \int_{\Omega_e} (\mathbf{L} N_i^e)^t (D) (\mathbf{L} N_j^e) d\Omega_e$$

Si se amplían las matrices de rigidez, se ensambla y efectúa la suma booleana, se obtiene:

$$F u_n = \sum_{e=1}^{\text{NE}} F^e u_n^e = \sum_{e=1}^{\text{NE}} \int_{\Omega_e} (\mathbf{L} \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e)^t (D) (\mathbf{L} \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e) d\Omega_e$$

$$F \mathbf{U} = \frac{\mathbf{U}^t}{(1 \times n)} \cdot \frac{\mathbf{K}}{n \times n} \cdot \frac{\mathbf{U}}{n \times 1} \quad (11)$$

aplicando la condición necesaria de mínimo  $\left( \frac{\partial F}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0} \right)$

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P}$$

Introduciendo los g.d.l. impuestos

$$\mathbf{K}^* \mathbf{U} = \mathbf{P}$$



de donde

$$U = (K^*)^{-1} \cdot P \quad (12)$$

El valor del mínimo del funcional  $F_{\min}$  se calcula sustituyendo (12) en (11).

### Hiperelementos $C^K$ extraclase $H$

Según el orden del problema se deben utilizar elementos que satisfagan una serie de requerimientos de continuidad adecuados.

Los elementos finitos de clase  $C^K$  se caracterizan por la existencia de continuidad hasta la derivada de orden  $K$  inclusive, tanto en el interior como en la frontera (a lo largo y a través de los lados) y en los nudos del elemento. En este caso se denominan elementos conformes.

Los elementos finitos de orden  $C^K$  pueden utilizarse en problemas de orden  $m \leq K+1$  y así las funciones base  $\phi_i \in W_2^m(\Omega)$ .

Un hiperelemento de clase  $C^K$  corresponde a un elemento cuyos requerimientos de continuidad en un conjunto discreto de nodos es superior a  $K$ . En particular los g.d.l. asociados a los vértices son de orden  $C^{K+H}$  donde  $H > 0$  es la extraclase del hiperelemento<sup>9</sup>.

La familia de hiperelementos de este tipo se puede construir según se indica en la figura 7 donde están representados los distintos g.d.l. asociados a cada nodo.

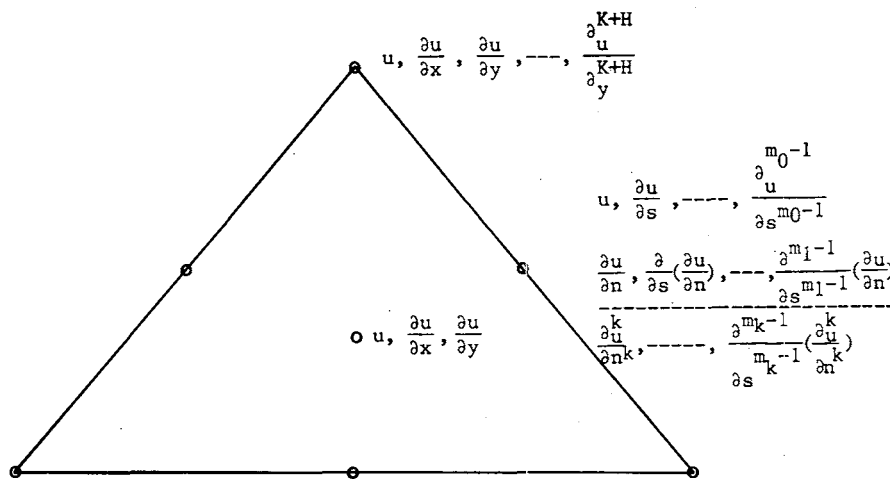


Figura 7.— Hiperelementos de clase  $C^K$ , extraclase  $H$ .

En cada vértice hay  $S(K+H) = \frac{(K+H+1)(K+H+2)}{2}$  parámetros:

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial^{K+H} u}{\partial y^{K+H}}$$

En los puntos medios de los lados hay:

$$m_0 \text{ parámetros de tipo } C^0$$

$$u, \frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \dots, \frac{\partial^{m_0-1} u}{\partial s^{m_0-1}}$$

$$m_1 \text{ parámetros de tipo } C^1$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right), \dots, \frac{\partial^{m_1-1}}{\partial s^{m_1-1}} \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)$$

$$m_K \text{ parámetros de tipo } C^K$$

$$\frac{\partial_u^k}{\partial n}, \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial_u^k}{\partial n} \right), \dots, \frac{\partial^{m_K-1}}{\partial s^{m_K-1}} \left( \frac{\partial_u^k}{\partial n} \right)$$

La diferencia  $L$  (positiva) entre el número de coeficientes  $S(N)$  de las funciones base polinómicas utilizadas, y el número de g.d.l., asociados al elemento, mínimos para la continuidad, indica el número extra de g.d.l. Estos se disponen en los puntos medios de los lados por tríadas y únicamente de cada tipo superior a  $C^K$

$$m_{K+1} = 1 \text{ parámetros de tipo } C^{K+1}$$

$$\frac{\partial_u^{K+1}}{\partial n^{K+1}}$$

$$m_{K+2} = 1 \text{ parámetros de tipo } C^{K+2}$$

$$\frac{\partial_u^{K+2}}{\partial n^{K+2}}$$

$$m_{K+L} = 1 \text{ parámetros de tipo } C^{K+L}$$

$$\frac{\partial_u^{K+L}}{\partial n^{K+L}}$$

Si  $L$  no es múltiplo de 3, los restantes g.d.l. se sitúan en el centro de gravedad del triángulo como g.d.l. interiores:

$$n_0 \text{ parámetros de tipo}$$

$$u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$$

Para más detalles, ver<sup>9</sup>

### Obtención de las funciones de forma

Dada la complejidad en la situación 2-D y debido al tipo de elementos (hiperelementos) utilizado, sobre todo cuando  $K \geq 1$ , se hace precisa la determinación de las funciones de forma mediante un proceso numérico estandar.

Las funciones de forma de un hiperelemento con  $NGLE$  g.d.l.,  $N_i^e(x,y)$ , son polinomios de grado  $N$  en dos dimensiones, por tanto, con  $(N+1)(N+2)/2$  coeficientes a determinar.

La restricción de la solución aproximada al dominio de un elemento,  $u_n^e$ , se puede expresar en coordenadas triangulares como sigue<sup>11</sup>

$$u_n^e = \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^N \alpha_{ijk} L_1^i L_2^j L_3^k = \mathbf{L} \cdot \alpha \quad (13)$$

$$i+j+k = N$$

imponiendo la condición de que  $u_n^e(L_1, L_2, L_3)$  coincida con el correspondiente g.d.l. en los nodos, se tiene

$$\frac{u^e}{(NGLE \times 1)} = \frac{\mathbf{C}}{(NGLE \times NGLE)} \cdot \frac{\alpha}{(NGLE \times 1)}$$

con  $\mathbf{C}$  matriz con valores numéricos

$$\alpha = \mathbf{C}^{-1} \cdot u^e \quad (14)$$

pero

$$u_n^e = \mathbf{N}^e \cdot u^e$$

igualando con (13)

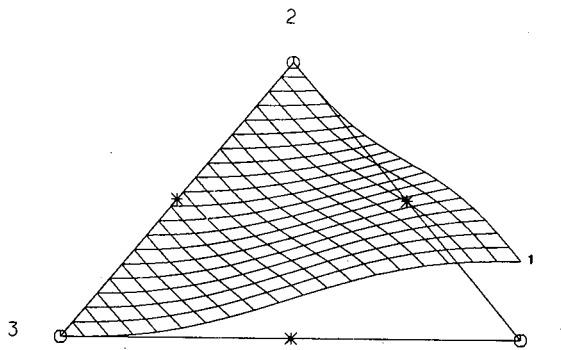
$$\mathbf{N}^e \cdot u^e = \mathbf{L} \cdot \alpha$$

al sustituir (14),

$$\mathbf{N}^e = \mathbf{L} \cdot \mathbf{C}^{-1}$$

En la figura 8 se representan las funciones de forma (de tercer grado) correspondientes al hiperelemento definido por  $K = 0, H = 1$ . Las funciones de forma quínticas del elemento  $K = 1, H = 1$  se muestran asimismo en la figura 9.

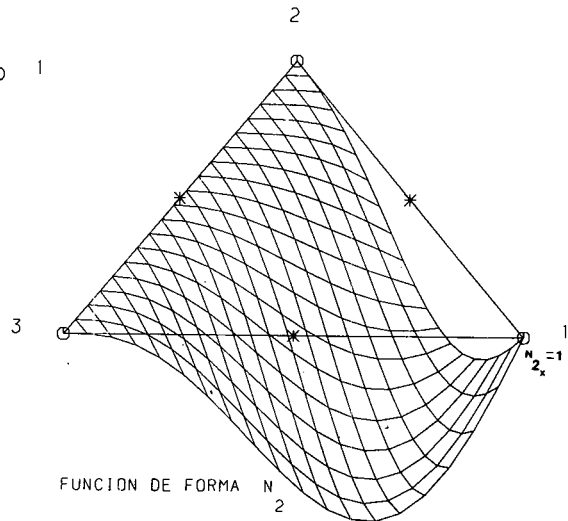




FUNCION DE FORMA  $N_1$

$$\odot = Z, ZX, ZY, ZXX, ZXY, ZYY$$

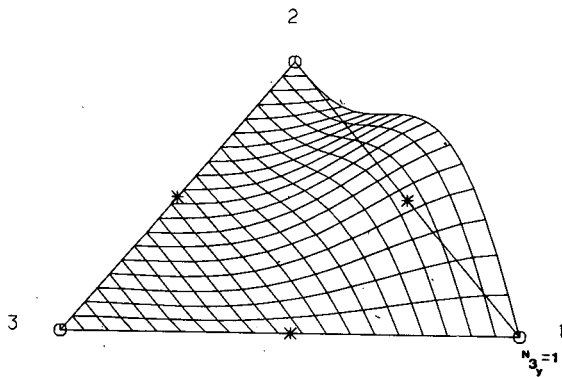
$$* = ZN_1$$



FUNCION DE FORMA  $N_2$

$$\odot = Z, ZX, ZY, ZXX, ZXY, ZYY$$

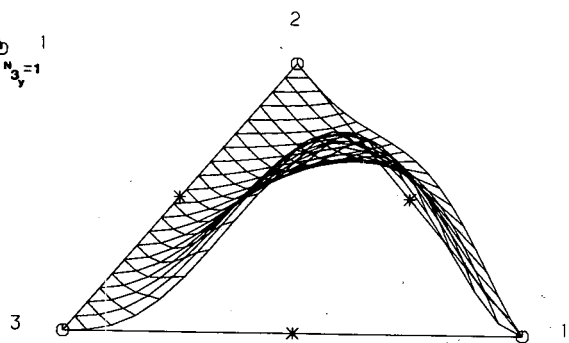
$$* = ZN_2$$



FUNCION DE FORMA  $N_3$

$$\odot = Z, ZX, ZY, ZXX, ZXY, ZYY$$

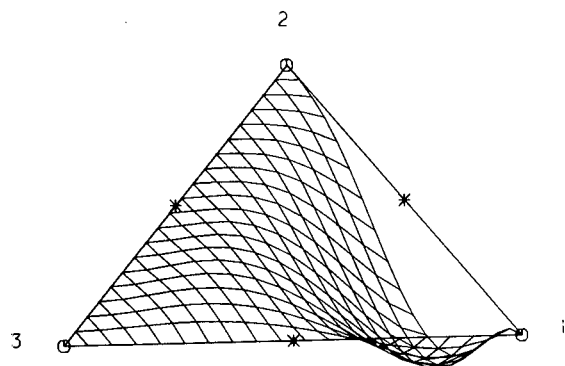
$$* = ZN_3$$



FUNCION DE FORMA  $N_4$

$$\odot = Z, ZX, ZY, ZXX, ZXY, ZYY$$

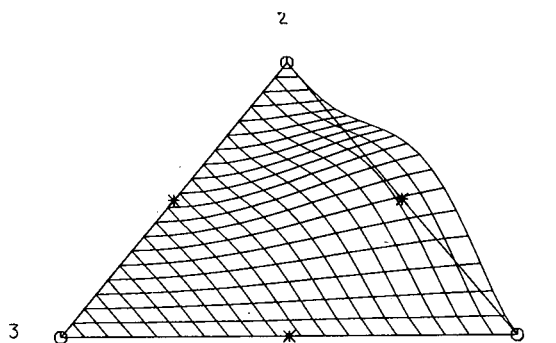
$$* = ZN_4$$



FUNCION DE FORMA  $N_5$

$$\odot = Z, ZX, ZY, ZXX, ZXY, ZYY$$

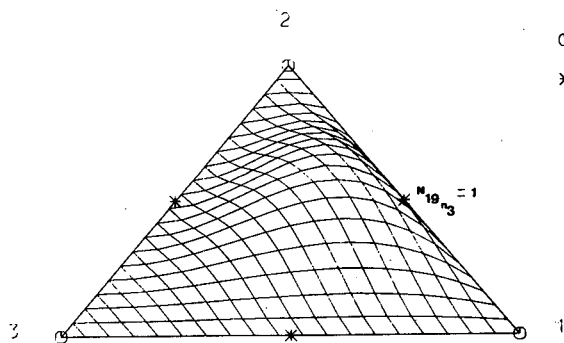
$$* = ZN_1$$



FUNCION DE FORMA  $N_6$

$$\odot = Z, ZX, ZY, ZXX, ZXY, ZYY$$

$$* = ZN_1$$



FUNCION DE FORMA  $N_{19}$

$$\odot = Z, ZX, ZY, ZXX, ZXY, ZYY$$

$$* = ZN_1$$

Figuras 9-a, 9-b, 9-c, 9-d, 9-e, 9-f, 9-g.— Funciones de forma. Hiperelemento  $K = 1, H = 1$ .

### Ejemplos de aplicación

Con objeto de comprobar la eficiencia de esta interpolación 2-D se ha estudiado la interpolación de los datos correspondientes a la superficie esférica

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$$

en  $[0,1] \times [0,1]$ .

Dentro de los distintos casos analizados, se presentan a continuación los resultados obtenidos utilizando elementos  $C^1$  con mallas de 18 y 50 elementos (figuras 10-a y 10-b) para diferentes distribuciones de datos.

MALLA: NE = 18				
FUNCIONAL	RENDIMIENTO Nº DATOS/Nº GDL (%)	VALOR DE Fu		OBSERVACIONES
		APROXIMADO	EXACTO	
$\int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yy}^2) d\Omega$	39.53	8.64727	8.67850	
	62.79	8.67206		
$\int_{\Omega} (u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yy}^2) d\Omega$	39.53	0.23579	0.26232	Fig. 11
	62.79	0.25743		

Tabla 7.— Resultado de la interpolación 2-D con malla de 18 elementos.

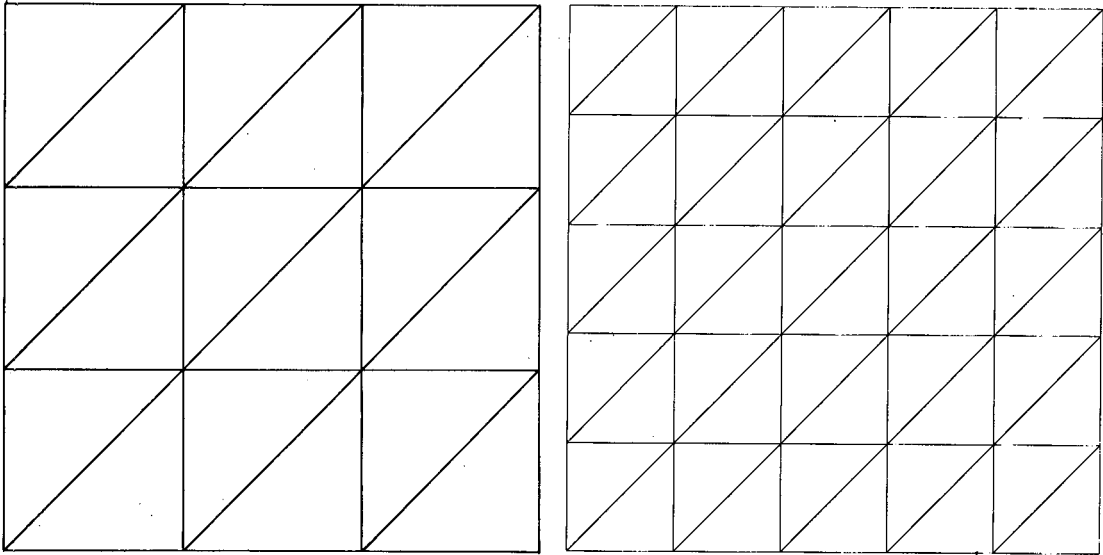
MALLA: NE=50				
FUNCIONAL	RENDIMIENTO Nº DATOS/Nº GDL (%)	VALOR DE Fu		OBSERVACIONES
		APROXIMADO	EXACTO	
$\int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yy}^2) d\Omega$	32.22	8.64769	8.67850	
	55.48	8.67287		
$\int_{\Omega} (u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yy}^2) d\Omega$	32.22	0.23324	0.26232	Figura 12
	55.48	0.25718		

Tabla 8.— Resultados con malla de 50 elementos.

MALLA: NE=50				
FUNCIONAL	RENDIMIENTO Nº DATOS/Nº GDL (%)	VALOR DE Fu		OBSERVACIONES
		APROXIMADO	EXACTO	
$\int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2 + u_{xx}^2 + u_{xy}^2 + u_{yy}^2) d\Omega$	43.19	8.65720	8.67850	
	55.48	8.66791		
	65.45	8.67083		

Tabla 9.— Distribución aleatoria de datos.

La tabla 9 se refiere a una distribución aleatoria de datos, mientras que en las tablas 7 y 8 los datos, corresponden a una distribución con un mayor porcentaje de las derivadas de orden más bajo.



Figuras 10-a, 10-b.— Mallas de elementos finitos.

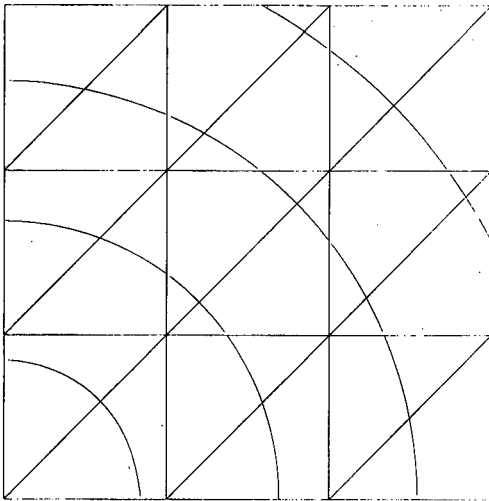


Figura 11.— Solución aproximada con malla de 18 elementos.

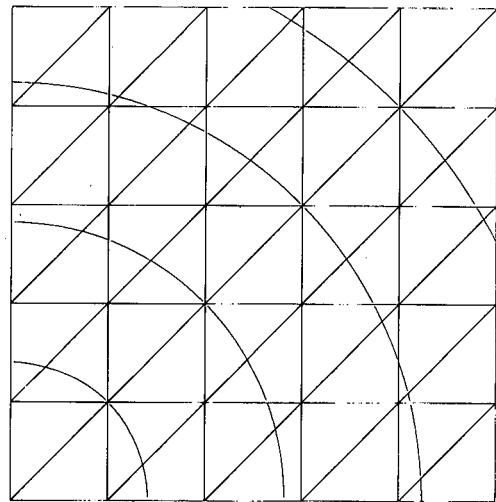


Figura 12.— Solución aproximada con malla de 50 elementos.

Las figuras 11 y 12, representan los cortes por planos  $z=cte$  con la superficie interpolante, para los casos indicados en las tablas 7 y 8.

Cabe notar en los distintos casos estudiados, la obtención de resultados similares utilizando estos dos tipos de mallas.

Asimismo, con el fin de obtener resultados adecuados, se observa que los g.d.l. que aparecen con menos porcentaje en los datos deben poseer un mayor peso en el funcional.



Finalmente, se ha notado el aumento en la exactitud de los resultados al incrementar el orden de los elementos, si bien con un mayor coste de cálculo para un mismo número de elementos.

### CONCLUSIONES

Se ha desarrollado un método basado en una formulación, variacional y discretización en elementos finitos, que aporta una solución a los problemas de aproximación e interpolación de Birkhoff. Se pueden generar con el método funciones interpolantes con diferentes niveles de continuidad, incluso es posible introducir discontinuidades en conjuntos de puntos aislados.

Se ha aplicado el método a problemas 1-D y 2-D. La eficiencia del mismo medida en una aproximación al valor del funcional ha sido adecuada, particularmente en los problemas 1-D.

El desarrollo presentado tanto en situaciones de 1-D y 2-D, puede extenderse utilizando elementos de mayor orden de continuidad (funciones polinómicas de alto grado). Pero a costa de un incremento del esfuerzo de cálculo debido, entre otros aspectos, al aumento del ancho de banda y a un mayor número de puntos de Gauss en la integración numérica; pero con la ventaja de una mayor aceleración de la convergencia ( $h^k$ -convergencia).

### APENDICE A

#### FUNCIONES DE FORMA 1-D

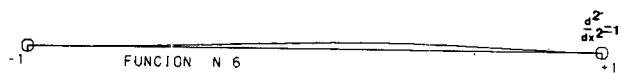
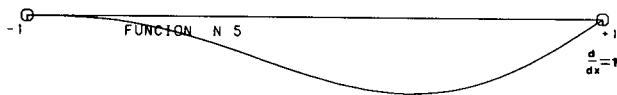
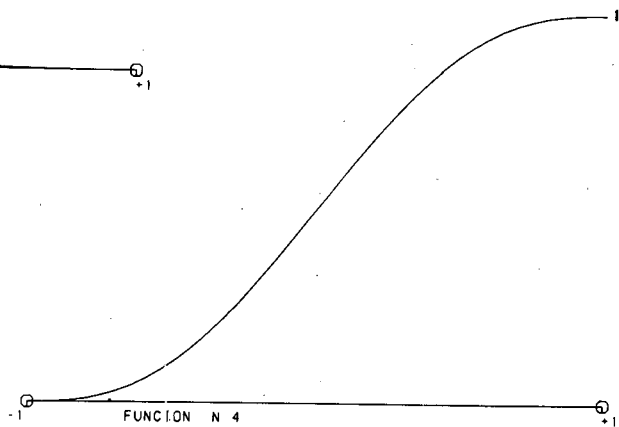
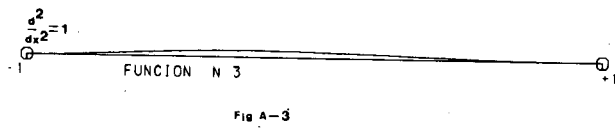
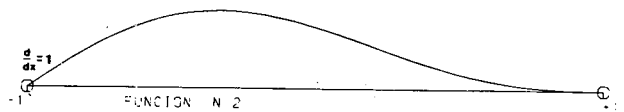
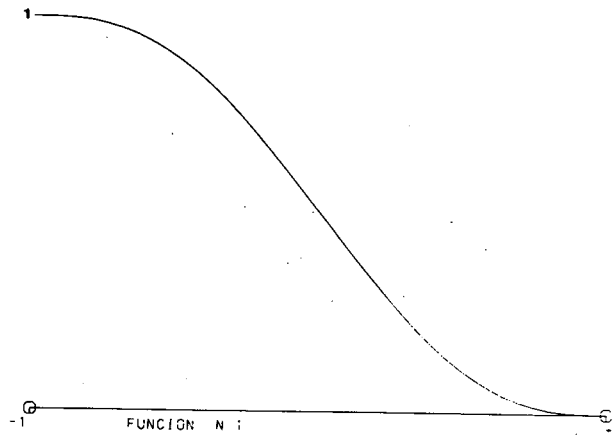
ELEMENTO		1	$\xi$	$\xi^2$	$\xi^3$	$\xi^4$	$\xi^5$	$\xi^6$	$\xi^7$	
$C^0$	$N_1$	0.5000	-0.5000							
	$N_2$	0.5000	0.5000							
$C^1$	$N_1$	0.5000	-0.7500	0.0000	0.2500					
	$N_2$	0.1250	-0.1250	-0.1250	0.1250					
	$N_3$	0.5000	0.7500	0.0000	-0.2500					
	$N_4$	-0.1250	-0.1250	0.1250	0.1250					
$C^2$	$N_1$	0.5000	-0.9375	0.0000	0.6250	0.0000	-0.1875			
	$N_2$	0.1562	-0.2188	-0.1875	0.3125	0.0312	-0.0938			
	$N_3$	0.0156	-0.0156	-0.0312	0.0313	0.0156	-0.0156			
	$N_4$	0.5000	0.9375	0.0000	-0.6250	0.0000	0.1875			
	$N_5$	-0.1562	-0.2188	0.1875	0.3125	-0.0313	-0.0938			
	$N_6$	0.0156	0.0156	-0.0313	-0.0313	0.0156	0.0156			
$C^3$	$N_1$	0.5000	-1.0937	0.0000	1.0937	0.0000	-0.6562	0.0000	0.1562	
	$N_2$	0.1719	-0.2969	-0.2344	0.5469	0.0781	-0.3281	-0.0156	0.0781	
	$N_3$	0.0234	-0.0312	-0.0547	0.0781	0.0391	-0.0625	-0.0078	0.0156	
	$N_4$	0.0013	-0.0013	-0.0039	0.0039	0.0039	-0.0039	-0.0013	0.0013	
	$N_5$	0.5000	1.0937	0.0000	-1.0937	0.0000	0.6562	0.0000	-0.1562	
	$N_6$	-0.1719	-0.2969	0.2344	0.5469	-0.0781	-0.3281	0.0156	0.0781	
	$N_7$	0.0234	0.0313	-0.0547	-0.0781	0.0391	0.0625	-0.0078	-0.0156	
	$N_8$	-0.0013	-0.0013	0.0039	0.0039	-0.0039	-0.0039	0.0013	0.0013	

Figs. A-1,  
A-2, A-3,  
A-4, A-5,  
A-6.

## APENDICE A

ELEMENTO		1	$\xi$	$\xi^2$	$\xi^3$	$\xi^4$	$\xi^5$
$l_1 = 0$ $l_2 = 1$	$N_1$	0.2500	-0.5000	0.2500			
	$N_2$	0.7500	0.5000	-0.2500			
	$N_3$	-0.2500	0.0000	0.2500			
$l_1 = 0$ $l_2 = 2$	$N_1$	0.1250	-0.3750	0.3750	-0.1250		
	$N_2$	0.8750	0.3750	-0.3750	0.1250		
	$N_3$	-0.3750	0.1250	0.3750	-0.1250		
	$N_4$	0.0625	-0.0625	-0.0625	0.0625		
$l_1 = 1$ $l_2 = 2$	$N_1$	0.3125	-0.7500	0.3750	0.2500	-0.1875	
	$N_2$	0.0625	-0.1250	0.0000	0.1250	-0.0625	
	$N_3$	0.6875	0.7500	-0.3750	-0.2500	0.1875	
	$N_4$	-0.2500	-0.1250	0.3750	0.1250	-0.1250	
	$N_5$	0.0313	0.0000	-0.0625	0.0000	0.0313	
$l_1 = 0$ $l_2 = 3$	$N_1$	0.0625	-0.2500	0.3750	-0.2500	0.0625	
	$N_2$	0.9375	0.2500	-0.3750	0.2500	-0.0625	
	$N_3$	-0.4375	0.2500	0.3750	-0.2500	0.0625	
	$N_4$	0.0938	-0.1250	-0.0625	0.1250	-0.0313	
	$N_5$	-0.0104	0.208	0.0000	-0.0208	0.0104	
$l_1 = 1$ $l_2 = 3$	$N_1$	0.1875	-0.6250	0.6250	0.0000	-0.3125	0.1250
	$N_2$	0.0313	-0.0937	0.0625	0.0625	-0.0938	0.0313
	$N_3$	0.8125	0.6250	-0.6250	0.0000	0.3125	-0.1250
	$N_4$	-0.3438	-0.0313	0.5625	-0.0625	-0.2188	0.0938
	$N_5$	0.0625	-0.0313	-0.1250	0.0625	0.0625	-0.0313
	$N_6$	-0.0052	0.0052	0.0104	-0.0104	-0.0052	0.0052

ELEMENTO		1	$\xi$	$\xi^2$	$\xi^3$	$\xi^4$	$\xi^5$	$\xi^6$
$l_1 = 2$ $l_2 = 3$	$N_1$	0.3437	-0.9375	0.4688	0.6250	-0.4688	-0.1875	0.1563
	$N_2$	0.0937	-0.2187	0.0000	0.3125	-0.1563	-0.0938	0.0625
	$N_3$	0.0078	-0.0156	-0.0078	0.0312	-0.0078	-0.0156	0.0078
	$N_4$	0.6563	0.9375	-0.4688	-0.6250	0.4688	0.1875	-0.1563
	$N_5$	-0.2500	-0.2187	0.4688	0.3125	-0.3125	-0.0938	0.0938
	$N_6$	0.0391	0.0156	-0.1016	-0.0313	0.0859	0.0156	-0.0234
	$N_7$	-0.0026	0.0000	0.0078	0.0000	-0.0078	0.0000	-0.0026



Figuras A-1, A-2, A-3, A-4, A-5, A-6.— Funciones de forma elemento  $C^2(l_i = 2)$ .



APENDICE C DATOS EJEMPLO 2

NUDOS GDL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42			
u	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
u'	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
u''	1																																												

Malla 1

NUDOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42			
GDL																																													
u	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
u'	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
u''	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Malla 2

## REFERENCIAS

1. K. Rektorys. "Variational methods in Mathematics Science and Engineering" D. Reidel. (1980).
2. J.L. Lions. "Optimal control of systems governed by partial differential equations". Springer Verlag. (1971).
3. J.M. Sanz Serna. "Interpolación y mínimos cuadrados". Dpto. Ecuaciones Funcionales. Universidad de Valladolid. (1980).
4. G.G. Lorentz, K. Jetter, S.D. Riemschneider. "Birkhoff Interpolation". Addison-Wesley. (1983).
5. M. Crouzeux, A.L. Mignot. "Aproximation des fonctions d'une variable réelle par des polynomes". Ed. Masson (1984).
6. A.F. Samartín. "Aplicación del m.e.f. al análisis estructural de tableros de puentes". Discurso inaugural curso 1979-80. Universidad de Santander.
7. G.F. Carey, J.T. Oden. "Finite elements, a second course". Vol. II. Prentice-Hall. (1983).
8. M. Gasca, J.I. Maeztu. "On Lagrange and Hermite interpolation in  $R^K$ ". Numer. Math. 39, 1-14. (1982).
9. A.F. Samartín. "Desarrollo de familias jerárquicas de elementos finitos de clase  $C^K$ ". V.I.C.E.D. Y.A. Jaca (Huesca). (1983).
10. Courant and Hilbert. "Methods of Mathematical Physics". Vol. I. Interscience Publisher. (1953).
11. J. Díaz del Valle. "Una contribución al estudio de hiperelementos finitos en flexión de placas" Tesis Doctoral. E.T.S. Ingenieros de Caminos. Universidad de Santander. (1980).